
Mécanique analytique, Corrigé 10

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

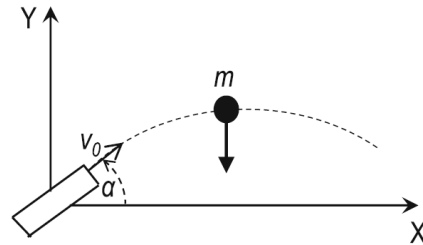
lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Hamilton-Jacobi

Considérer un projectile de masse m en vol balistique dans un champ de gravité uniforme, lancé avec une vitesse initiale v_0 et un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Déterminer, à l'aide de la méthode de Hamilton-Jacobi, le trajectoire du projectile.
2. Donner la valeur de l'angle de lancement qui maximise la portée horizontale du projectile.



Solution.

1. Le problème possède deux degrés de liberté et l'on choisit comme coordonnées généralisées la distance horizontale x et la hauteur y dans les coordonnées cartésiennes (voir Fig. 5.1). Les conditions initiales pour $t = 0$ sont : $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$. Le potentiel est $V = mgy$, et le Lagrangien et le Hamiltonien s'écrivent respectivement

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (1)$$

$$H = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgy \quad (3)$$

puisque $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ et $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ donnant respectivement $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$ et $\dot{y} = \frac{p_y}{m}$. Comme on a également $p_x = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}$ et $p_y = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}$, l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} \right)^2 \right] + mgy = 0 \quad (4)$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, on pose $\mathcal{S} = S_x(x) + S_y(y) + S_t(t)$. L'équation de Hamilton-Jacobi (4) donne

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dS_x}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dS_y}{dy} \right)^2 \right] + mgy = - \frac{dS_t}{dt} \quad (5)$$

Les deux côtés de (5) sont alors égaux à une constante E , d'où

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_y}{dy} \right)^2 + mgy = E - \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_x}{dx} \right)^2 \quad (6)$$

$$S_t = -Et \quad (7)$$

où E est l'énergie totale du système, puisque le Hamiltonien ne dépend pas du temps : le système est conservatif (toute perte d'énergie due au frottement est négligée).

Les deux côtés de (6) sont à leur tour égaux à une constante β , conduisant à

$$S_x = \int \sqrt{2m(E - \beta)} dx \quad (8)$$

$$S_y = \int \sqrt{2m(\beta - mgy)} dy \quad (9)$$

et la solution complète devient

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{2m(E - \beta)} dx + \int \sqrt{2m(\beta - mgy)} dy - Et \quad (10)$$

On peut maintenant introduire une transformation canonique $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, en introduisant la fonction génératrice $F_2(x, y, P_1, P_2, t) = S(x, y, E, \beta, t)$, où on a remplacé $P_1 = E$ et $P_2 = \beta$. On peut alors exprimer les nouvelles coordonnées généralisées Q_1 et Q_2 en fonction de F_2 , par les relations $Q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial E}$ et $Q_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \beta}$. Avec l'expression de F_2 donnée par (10), on obtient les équations du mouvement du projectile

$$\int \frac{m dx}{\sqrt{2m(E - \beta)}} - t = Q_1 \quad (11)$$

$$\sqrt{\frac{m}{2(E - \beta)}} x = t + Q_1 \quad (12)$$

$$x = \sqrt{\frac{2(E - \beta)}{m}} (t + Q_1) \quad (13)$$

et ensuite, pour $\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = Q_2$, on a

$$- \int \frac{m dx}{\sqrt{2m(E - \beta)}} + \int \frac{m dy}{\sqrt{2m(\beta - mgy)}} = Q_2 \quad (14)$$

$$- \sqrt{\frac{m}{2(E - \beta)}} x - \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{\beta - mgy}}{g} = Q_2. \quad (15)$$

En résolvant (15) pour y , il vient

$$y = -\frac{mg}{4(E-\beta)}x^2 - gQ_2\sqrt{\frac{m}{2(E-\beta)}}x + \left(\frac{\beta}{mg} - \frac{gQ_2^2}{2}\right). \quad (16)$$

La condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pour $t = 0$, appliquée à (13) et (16), donne respectivement $Q_1 = 0$ et $Q_2 = \sqrt{\frac{2\beta}{mg^2}}$, ce qui simplifie l'expression de y dans (16) en

$$y = -\frac{mg}{4(E-\beta)}x^2 - \sqrt{\frac{\beta}{E-\beta}}x. \quad (17)$$

La dérivée temporelle de (17) s'écrit alors

$$\dot{y} = -\left(\frac{mg}{2(E-\beta)}x + \sqrt{\frac{\beta}{E-\beta}}\right)\dot{x}. \quad (18)$$

Les conditions initiales $x_0 = 0$ et $(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ appliquées à (18) donnent $\beta = E \sin^2 \alpha$ et les relations (17) et (13) se simplifient en

$$y = -\frac{mg}{4E \cos^2 \alpha}x^2 + \tan \alpha x, \quad (19)$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos \alpha t. \quad (20)$$

Les équations (19) et (20) donnent respectivement y en fonction de x et x en fonction de t . En remplaçant x donné par (20) dans (19), on obtient y en fonction de t :

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \alpha t. \quad (21)$$

On peut remplacer l'énergie totale constante du système E par l'énergie cinétique initiale

$$E = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (22)$$

ce qui, remplacé dans (19)–(21), donne finalement

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 + \tan \alpha x, \quad (23)$$

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad (24)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t. \quad (25)$$

2. Pour déterminer la valeur de α qui maximise la distance horizontale x , on cherche les valeurs de x qui coupent l'axe X pour $y = 0$. L'équation (23) donne

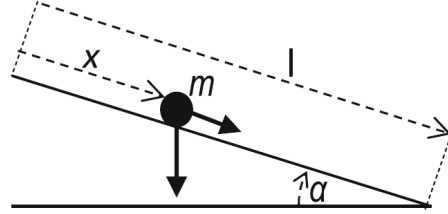
$$\left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}x + \tan \alpha\right)x = 0, \quad (26)$$

qui s'annule pour $x = 0$ et $x = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$. Cette dernière valeur est maximale lorsque $\sin(2\alpha) = 1$, c'est-à-dire pour $\alpha = 45^\circ$.

Exercice 2 : Particule glissant sur un plan incliné

Considérer une particule de masse m glissant sur un plan incliné de longueur l , sans frottement. La particule est soumise à la force de gravité avec accélération g . Le plan incliné forme un angle α par rapport à l'horizontale. On indique avec x la position de la particule le long du plan incliné, comme montré dans la figure.

1. Déterminer, à l'aide de la méthode de Hamilton–Jacobi, le mouvement de la particule pour des conditions initiales arbitraires x_0 et v_0 .
2. Donner le mouvement dans le cas où on la particule a une vitesse nulle à l'instant initiale $t = 0$.



Solution.

1. Le problème possède un degré de liberté ($n = 1$) et l'on choisit comme coordonnée généralisée la distance x à partir du point de départ x_0 le long du plan incliné de longueur l (voir Fig. 5.2). On a donc pour conditions initiales : $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$. Le potentiel s'écrit $V = mg(l - x) \sin \alpha$, ce qui donne pour le Lagrangien et le Hamiltonien

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mg(l - x) \sin \alpha, \quad (27)$$

$$H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mg(l - x) \sin \alpha. \quad (28)$$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + mg(l - x) \sin \alpha \quad (29)$$

où, dans (29), \dot{x} a été remplacé par p_x/m à partir de $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$. Comme on a aussi $p_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, l'équation de Hamilton–Jacobi s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + mg(l - x) \sin \alpha = 0. \quad (30)$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, on pose $S = S_x(x) + S_t(t)$, ce qui permet de réécrire (30) sous la forme

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_x}{dx} \right)^2 + mg(l - x) \sin \alpha = - \frac{dS_t}{dt}. \quad (31)$$

Les deux membres de (31) sont alors égalés à une constante E , qui est l'énergie totale du système, celui-ci étant conservatif (le glissement est supposé sans frottement) :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_x}{dx} \right)^2 + mg(l - x) \sin \alpha = E, \quad (32)$$

$$\frac{dS_t}{dt} = -E. \quad (33)$$

On peut procéder comme dans l'exercice précédant. Ici, pour simplicité de notation, on évite de définir la fonction génératrice F_2 et on procède directement en prenant les dérivées de S . On obtient alors successivement

$$S_x = \int \sqrt{2m(E - mg(l - x) \sin \alpha)} dx, \quad (34)$$

$$S_t = -Et. \quad (35)$$

La solution complète devient

$$S = \int \sqrt{2m(E - mg(l - x) \sin \alpha)} dx - Et. \quad (36)$$

L'équation du mouvement $\frac{\partial S}{\partial E} = \gamma$ donne ensuite

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - mg(l - x) \sin \alpha}} = \gamma + t. \quad (37)$$

Pour calculer cet intégral, on met en évidence le facteur $mg \sin \alpha$ dans le dénominateur du radical. On peut après utiliser l'intégrale connue

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax + b} + C$$

en posant $a = mg \sin \alpha$ et $b = E - mgl \sin \alpha$. On trouve

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{2}{mg \sin \alpha} \sqrt{E - mg(l - x) \sin \alpha} = \gamma + t. \quad (38)$$

L'expression de x est ensuite obtenue à partir de (38).

$$\begin{aligned} x &= \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + g\gamma \sin \alpha t + \left(\frac{g \sin \alpha \gamma^2}{2} + l - \frac{E}{mg \sin \alpha} \right) \\ &= \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned} \quad (39)$$

2. Comme la particule est initialement au repos, la vitesse initiale $v_0 = g\gamma \sin \alpha$ est nulle, ce qui impose $\gamma = 0$. L'équation (39) devient alors

$$x = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + l - \frac{E}{mg \sin \alpha}. \quad (40)$$

Pour déterminer la valeur de E , on identifie $l - \frac{E}{mg \sin \alpha}$ à la position initiale x_0 , ce qui donne $E = mg \sin \alpha (l - x_0)$, c'est-à-dire l'énergie potentielle et l'énergie totale E du système avant le début du mouvement. L'équation (40) devient finalement

$$x = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + x_0. \quad (41)$$